

Versuchsprotokoll:

Winkelkorrelation bei γ -Strahlung

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe 221

Karlsruhe, 31. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Ziele des Versuchs	2
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Isotrope Emission	2
2.2	Winkelabhängige Emission	2
2.2.1	Aufhebung der Entartung durch äußeres Magnetfeld	2
2.2.2	Anisotropie durch gleichzeitige Emission	3
2.3	Winkelkorrelation der γ -Strahlung von ^{60}Ni	4
2.4	Bestimmung der Koeffizienten	4
3	Versuchsaufbau	4
4	Versuchsdurchführung	6
4.1	Korrekturen	6
4.2	Messungen	6
5	Auswertung	7
5.1	Auflösungszeit	7
5.2	Anisotropie	8
5.2.1	Auswertung über alle Messreihen	8
5.2.2	Getrennte Auswertung der Messreihen	9
5.2.3	Vergleich und Fazit	11

1 Ziele des Versuchs

In diesem Versuch soll die Winkelkorrelation beim γ -Zerfall von ^{60}Ni untersucht werden. Dazu werden die Zerfallsraten in drei verschiedene Richtungen gemessen und untersucht, wie diese zusammenhängen. Damit kann die Anisotropie der Emissionsrichtungen bestimmt werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Isotrope Emission

Für gewöhnlich ist die Emission elektromagnetischer Strahlung bei einem Übergang zwischen zwei Spin-Zuständen isotrop. Das heißt, die Strahlungsemission verläuft in alle Raumrichtungen gleichmäßig. Dafür müssen zum einen alle möglichen $2J + 1$ magnetischen Unterzustände m_J (des Zustandes mit Spin J) gleich besetzt sein und zum anderen müssen alle möglichen Übergänge auftreten.

Am einfachsten Beispiel, nämlich beim Übergang von Zustand mit $J = 1$ zum Zustand mit $J = 0$, kann dieser Effekt veranschaulicht werden. Um von den 3 möglichen magnetischen Unterzuständen $m = -1, 0, 1$ des Zustandes $J = 1$ zum einzigen Unterzustand $m = 0$ des Zustandes $J = 0$ überzugehen, können die Übergänge mit den Änderungen der magnetischen Quantenzahl $\Delta m = -1, 0, 1$ auftreten. Aus der Optik ist die Wahrscheinlichkeit dieser Übergänge gegeben durch:

$$W_+ d\Omega = \frac{3}{16} \pi (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \quad (2.1)$$

$$W_0 d\Omega = \frac{3}{8} \pi \sin^2 \theta d\Omega \quad (2.2)$$

$$W_- d\Omega = \frac{3}{16} \pi (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \quad (2.3)$$

θ steht hier jeweils für den Winkel zwischen der ausgezeichneten z -Achse und der Richtung der emittierten Strahlung. Es ist offensichtlich, dass die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Übergänge nicht isotrop sind, doch ist die gesamte Wahrscheinlichkeit der Emission völlig unabhängig vom Winkel:

$$W_{\text{ges}} = \sum_i W_i d\Omega = \frac{3}{4} \pi d\Omega \quad (2.4)$$

Wenn man also nicht zwischen den einzelnen Übergängen unterscheidet, ist die Emission in alle Raumrichtungen gleich. Die Intensität der Strahlung der einzelnen Übergänge berechnet sich einfach aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeit des Übergangs und der Besetzungszahl des Zustandes, von dem der Übergang ausgeht. Die Gesamtintensität ist dann die Summe der einzelnen Intensitäten. Hier wird offensichtlich, dass nur bei einer Gleichverteilung der Besetzungszahlen der Zustände mit $J = 1$ die Gesamtintensität von θ unabhängig sein kann.

Zusammenfassend herrscht, wie oben behauptet, Isotropie, wenn alle Übergänge beobachtet werden und dazu alle Zustände gleich besetzt sind.

2.2 Winkelabhängige Emission

2.2.1 Aufhebung der Entartung durch äußeres Magnetfeld

Die Gleichbesetzung der Unterzustände eines festen Zustandes J ist aber nur gegeben, wenn dieser Zustand energetisch entartet ist. Alle Unterzustände haben also dieselbe Energie. Diese Entartung

kann beispielsweise durch ein äußeres Magnetfeld aufgehoben werden. Die Energie der magnetischen Unterzustände spalten auf, wie man es vom Zeeman-Effekt kennt. Im thermischen Gleichgewicht gehorcht die Verteilung dann der Boltzmann-Verteilung, sodass für das Verhältnis der Besetzungszahlen eines Zustandes i zum energetisch darüber liegenden Zustand $i + 1$ gegeben ist durch:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \exp -\frac{1}{J} \cdot \frac{\mu B}{k_B T} \quad (2.5)$$

Durch sehr kleine Temperaturen T und sehr große Magnetfelder B kann man erreichen, dass die Unterzustände sehr unterschiedlich besetzt sind. Dadurch unterscheiden sich die Intensitäten der einzelnen Übergängen stark voneinander, woraus eine starke Winkelabhängigkeit der Gesamtintensität folgt.

2.2.2 Anisotropie durch gleichzeitige Emission

In diesem Versuch soll die Anisotropie durch eine anderen Methode erreicht werden. Die Unterzustände sind am Anfang gleichverteilt. Doch der Übergang in den Grundzustand geschieht nicht nur über einen einzigen Übergang, sondern durch mehrere. Beispielsweise können bei einem Übergang in den Grundzustand über einen Zwischenzustand zuerst ein β -Teilchen und dann ein γ -Teilchen oder jeweils ein γ -Teilchen emittiert werden. Durch gleichzeitige Messung der zwei Übergänge wird die Isotropie der Emission aufgehoben.

Man nehme zum Beispiel eine Kaskade von Übergängen an, der zuerst von $J_1 = 0$ in $J_2 = 1$ und dann in einen beliebigen Zustand übergeht J_3 . Nach der Emission eines Teilchens durch den Übergang von J_1 in J_2 , welche durch die Gleichungen (2.1) bis (2.3) beschrieben werden kann, wird die Quantisierungsachse z in Richtung dieses emittierten Teilchens gelegt ($\theta = 0$). Dies ist aufgrund ihrer Rotationsinvarianz möglich. Durch diese Wahl ergibt sich für die zweite Emission folgende Einschränkung:

$$W_+ d\Omega = W_- d\Omega = \frac{3}{8} \pi d\Omega \quad W_0 d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

Für alle Kerne, bei denen die erste Emission nachgewiesen wurde, ist nun der Zustand $J_2 = 1$ und $m_2 = 0$ aufgrund von $W_0 d\Omega = 0$ nicht besetzt. Aufgrund dieser Ungleichheit der Besetzung folgt nun offensichtlich auch eine Anisotropie einer weiteren Emission.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die gleichzeitige Emission zweier γ -Quanten berechnet sich mit:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} A_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \quad i_{\max} = \text{Min}(L_1, L_2, J_2) \quad (2.7)$$

θ ist der Winkel zwischen den Emissionsrichtungen und P_{2i} die Legendre-Polynome bis zur Ordnung $2i$. Die Koeffizienten A_{2i} enthalten Informationen über die Übergangsmatrixelemente, die Spins der Zustände der Übergänge sowie die Multipolordnungen der γ -Strahlung.

Da $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, mit der ein Teilchen in den Raumwinkelbereich $d\Omega$ fliegt, ist dieser Bruch proportional zur Zählrate $N_k(\theta)$. Damit kann zur Vereinfachung eine Korrelationsfunktion $K(\theta)$ eingeführt werden, für welche gilt:

$$K(\theta) := \frac{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}}{\frac{d\sigma(90^\circ)}{d\Omega}} = 1 + \sum_{i=1}^{i_{\max}} a_{2i} \cos^{2i} \theta = \frac{N_k(\theta)}{N_k(90^\circ)} \quad (2.8)$$

$N_k(\theta)$ ist die Koinzidenz-Zählrate. Die Koeffizienten a_{2i} sind nur von den Drehimpulsen abhängig.

2.3 Winkelkorrelation der γ -Strahlung von ^{60}Ni

In diesem Versuch wird eine radioaktive ^{60}Co -Probe genommen, welche durch einen β -Zerfall in angeregtes ^{60}Ni übergeht. Dieses fällt dann in zwei Schritten, jeweils unter Emission eines γ -Quants in den Grundzustand ab. Dabei handelt es sich um elektrische Quadrupolstrahlung mit $L_1 = 2$ und $L_2 = 2$. Der Spin des Zwischenzustands ist ebenfalls $J_2 = 2$, woraus folgt, dass $i_{\max} = 2$ gilt. Damit lässt sich die Korrelationsfunktion schreiben als:

$$K(\theta) = 1 + a_2 \cos^2 \theta + a_4 \cos^4 \theta = \frac{N_k(\theta)}{N_k(90^\circ)} \quad (2.9)$$

Für die Anisotropie An , die als Abweichung der Winkelkorrelation von einer isotropen Verteilung definiert ist, gilt:

$$An = K(180^\circ) - 1 = a_2 + a_4 \quad (2.10)$$

Darüber hinaus sind für die Koeffizienten der Korrelationsfunktion folgende theoretische Werte bekannt:

$$a_2 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{24} \quad (2.11)$$

2.4 Bestimmung der Koeffizienten

Um die Anisotropie zu bestimmen, ist also letztendlich nur die Bestimmung der Konstanten a_2 und a_4 von Nöten. Diese erhält man durch Messen der Koinzidenzrate $N_k(\theta)$ bei $\theta = 90^\circ$ und bei zwei zusätzlichen verschiedenen Winkeln θ und lösen des Gleichungssystems bestehend aus Gleichung (2.9) bei verschiedenen Winkeln.

Für $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 135^\circ$ und $\theta_3 = 180^\circ$ erhält man damit:

$$\frac{N_k(135^\circ)}{N_k(90^\circ)} = K(135^\circ) = 1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_4 \quad (2.12)$$

$$\frac{N_k(180^\circ)}{N_k(90^\circ)} = K(180^\circ) = 1 + a_2 + a_4 \quad (2.13)$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man die Koeffizienten mit:

$$a_2 = 4K(135^\circ) - K(180^\circ) - 3 \quad (2.14)$$

$$a_4 = -4K(135^\circ) + 2K(180^\circ) + 2 \quad (2.15)$$

3 Versuchsaufbau

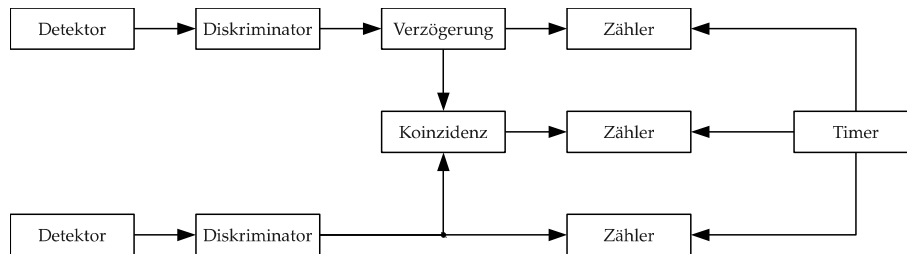
Zum Nachweis von γ -Quanten werden zwei NaJ-Szintillatoren verwendet, welche jeweils aus einem mit Thallium dotierten Natriumjodid-Kristall bestehen.

Ein γ -Quant hat hauptsächlich zwei verschiedene Möglichkeiten, um mit Elektronen im Szintillator zu wechselwirken. Zum einen kann es durch den Photoeffekt im Szintillator ein Elektron stark anregen, zum anderen kann es durch den Compton-Effekt an Elektronen gestreut werden. In beiden Fällen gibt es Energie ab, wobei dabei der Compton-Effekt wahrscheinlicher ist.

Wird im Kristall durch den Photoeffekt ein Elektron stark angeregt, kann es durch Stöße mit anderen Elektronen Exitonen auslösen. Bei der Erzeugung jedes Exitons gibt das freie Elektron einen kleinen

Teil seiner Energie ab, bis es durch eine Vielzahl erzeugter Exitonen seine komplette Energie verloren hat. Die Exitonen wiederum können unter Emission von Photonen rekombinieren. Die Thallium-Atome im Kristall katalysieren die Rekombination der Exitonen. Schlussendlich werden also durch ein γ -Quant eine große Anzahl an Photonen emittiert. Diese niederenergetischen Photonen können nun mit einem einfachen Photomultiplier nachgewiesen werden.

Da in diesem Versuch zwei Ereignisse gleichzeitig gemessen werden sollen, wird folgender Versuchsaufbau verwendet:



Der Detektor ist der soeben kurz beschriebene NaJ-Szintillator.

Bei dieser Versuchsanordnung muss man noch beachten, dass die γ -Quanten, die zu den Detektoren gelangen, dies nicht immer auf direktem Wege tun, sondern auch zum Beispiel durch Comptonstreuung zufällig dorthin gelandet sein könnten. Diese könnten dann falsche Koinzidenzen erzeugen, da man von diesen Quanten nicht genau weiß, unter welchem Winkel sie emittiert wurden. Die direkt eingetroffenen, „richtigen“ Quanten erzeugen bei der Messung einen Photopeak, die anderen erzeugen weitere Peaks, allerdings bei niedrigeren Energien. Da die verwendete Quelle sehr schwach ist, wird das Problem dadurch gelöst, dass alle Peaks, die bis zu 60% – 70% der Höhe des Photopeaks haben, ebenfalls zur Auswertung genommen werden. Damit ist für die Photonen, die diese Peaks ausgelöst haben, sichergestellt, dass diese nur Einzelereignisse repräsentieren. Damit werden andere Teilchen, die durch ein einzelnes nachgewiesenes γ -Quant ausgelöst werden könnten, nicht nochmals registriert, da sie nur noch maximal 40% der Energie haben¹. Durch diesen Kompromiss erhofft man sich eine bessere Statistik.

Die Messapparatur erkennt Koinzidenzen als solche an, wenn innerhalb eines fest definierten Zeitintervalls zwei Quanten in beiden Detektoren registriert wurden. Neben den Koinzidenzen, welche durch Comptonstreuung in den Detektor kamen, existieren noch zufällige Koinzidenzen. Diese sind ankommende Quanten der Quelle, die aber von verschiedenen Kernen emittiert wurden und nur zufällig nahezu zur gleichen Zeit in beiden Detektoren ankommen. Im Mittel ist die Differenz der Ankunftszeiten beider Quanten im Detektor im Gegensatz zu den echten Koinzidenzen wesentlich höher, da sie ja zufällig von verschiedenen Kernen stammen, und die Zeitdifferenz bei echten Koinzidenzen nahezu null ist. Diesen Effekt kann man ausnutzen, um nur zufällige Koinzidenzen zu messen. Statt die Detektorsignale direkt weiterzuleiten, kann man ein Signal verzögern, sodass wirklich gleichzeitig registrierte Ereignisse von echten Koinzidenzen von der Messapparatur nicht mehr als solche registriert werden können. Stattdessen können aber die Signale der leicht zeitverzögert ankommenden Photonen mit dieser Verzögerung in der Signalweiterleitung bei der Signalauswertung als simultan ankommende Photonen registriert werden. Dadurch hat man also auf jeden Fall die echten Koinzidenzen ausgeschlossen. In diesem Versuch soll dazu eine Verzögerung von 132 ns eingestellt werden. Durch Subtrahieren der Zahl der falschen Koinzidenzen von der Gesamtzahl der Koinzidenzen lässt sich so die Zahl der echten Koinzidenzen bestimmen.

Für die Anzahl Z_z der zufälligen auftretenden Koinzidenzen im Zeitintervall Δt während der Messdauer T ist $Z_z = Z_1 \frac{\Delta t}{T} Z_2$. Da sowohl zufällige Koinzidenzen des ersten Signals mit dem zweiten, als

¹Wie beim Umtauschen eines kaputten Geldscheins bei der Bank: Mann muss mehr als die Hälfte des Scheins besitzen, weil so kein anderer den anderen Teil des selben Scheins umtauschen kann.

auch vom zweiten Signal mit dem ersten auftreten können, ist die Rate N_z zufälliger Koinzidenzen gegeben durch

$$N_z = \frac{Z_z}{T} = 2\Delta t N_1 N_2 = \tau N_1 N_2 \quad (3.1)$$

Damit ist die Auflösungszeit τ der Koinzidenz durch

$$\tau = 2\Delta t = \frac{N_z}{N_1 N_2} \quad (3.2)$$

gegeben.

In diesem Versuch sollen diese Auflösungszeit und die Koeffizienten a_2 und a_4 der Korrelationsfunktion sowie die Anisotropie (Gleichungen (2.9) und (2.10) auf der vorherigen Seite) bestimmt werden. Dazu wird bei den 3 Winkeln 180° , 135° und 90° die Koinzidenzrate gemessen.

4 Versuchsdurchführung

Wir haben die Energiediskriminatoren so eingestellt, dass nur Signale von Ereignissen mit einer minimalen Energie von etwa 70% des Photopeaks registriert werden. Als Messdauer wurden immer $T = 400$ s gewählt. Für die Auflösungszeit des Koinzidenzzählers haben wir 50 ns gewählt, als Verzögerung für ein Signal war eine minimale Verzögerung von 5 ns eingestellt.

4.1 Korrekturen

Um die Messwerte von zufälligen Koinzidenzen und von Koinzidenzen des Untergrunds zu korrigieren, haben wir zum einen die Koinzidenzrate unter Ausschluss echter Koinzidenzen durch Verzögerung eines Signals² um 130 ns und zum anderen die Koinzidenzraten des Untergrunds aufgenommen (Tabelle 1).

Tabelle 1: Korrekturmessungen

	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate
Zufällige Koinzidenzen:	48735	51889	3
	48483	50596	0
Untergrund-Koinzidenzen:	1260	1316	3
	1337	1349	4

Um diese Werte müssen also unsere Messwerte korrigiert werden, indem man zunächst das Untergrundspektrum abzieht, da diese ja unabhängig von der Zählrate immer vorhanden ist. Erst nach der Normierung auf die Zählraten wird dann die normierte zufällige Koinzidenzrate abgezogen, da diese sich auf die Anzahl der Ereignisse bezieht.

4.2 Messungen

Weiterhin haben wir bei den drei Winkeln jeweils zwei Messreihen aufgenommen und dies alles dreimal wiederholt (Tabelle 2 auf der nächsten Seite).

²Da wir bei der Einstellung der Verzögerungszeit einen Schalter übersehen haben, hatten wir nur eine Verzögerungszeit von 130 ns statt 132 ns eingestellt. Da dies aber immernoch deutlich größer als die Auflösungszeit des Koinzidenzzählers von 50 ns ist, spielt dies hier keine Rolle.

Tabelle 2: Messwerte

	Winkel	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate
1. Messreihe:	90°	49416	52244	186
		49335	52598	192
	135°	49103	54957	228
		49207	54317	199
	180°	48928	52839	232
		48970	52317	184
2. Messreihe:	90°	49326	52363	174
		49055	52258	181
	135°	48696	54778	178
		48646	54891	192
	180°	48616	52824	229
		48846	52879	214
3. Messreihe:	90°	48983	51895	177
		48761	52512	189
	135°	48707	54536	202
		49325	54081	180
	180°	48328	52137	238
		48219	52657	197

5 Auswertung

Da die gemessenen Zählraten alle von statistischer Natur sind und der Poisson-Verteilung folgen, ist deren Standardabweichung σ gerade durch die Wurzel der Zählrate gegeben: $\sigma = \sqrt{N}$. Denn die Übereinstimmung der Varianz mit der Anzahl der Werte ist gerade eine besondere Eigenschaft der Poissonverteilung.

5.1 Auflösungszeit

Die Auflösungszeit des Koinzidenzzählers lässt sich aus den Messdaten zur zufälligen Koinzidenz direkt mit Gleichung (3.2) auf der vorherigen Seite berechnen. Dazu wurden wieder die beiden Einzelmessungen addiert, weshalb die gesamte Messdauer $T = 800$ s beträgt.

$$\tau = \frac{N_z}{N_1 N_2} = \frac{\frac{Z_z}{T}}{\frac{Z_1}{T} \frac{Z_2}{T}} = T \frac{Z_z}{Z_1 Z_2} = 240,9 \text{ ns} \quad (5.1)$$

Die Fehler der Zählraten sind durch die Wurzel des jeweiligen Wertes gegeben. Für den Fehler der Messzeit T haben wir 1% der Messdauer angenommen, also $\delta T = 8$ s. Damit folgt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\delta \tau = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial N_z} \delta N_z\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial N_1} \delta N_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial N_2} \delta N_2\right)^2} \quad (5.2)$$

$$= \tau \sqrt{\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 + \frac{1}{N_z} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \quad (5.3)$$

$$= 139,1 \text{ ns} \quad (5.4)$$

Somit erhalten wir eine Auslösungszeit mit einem Fehler aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung von

$$\tau = (240,9 \pm 139,1) \text{ ns} \quad (5.5)$$

Der große Fehler von etwa 57,7% ist durch die niedrige zufällige Koinzidenzrate von $N_z = 3$ in insgesamt 800 s zu erklären. Allein die Wurzel des Kehrwertes von N_z beträgt bereits $\sqrt{\frac{1}{N_z}} = 0,577$. Wie man sieht, kommt der große Fehler fast nur durch diesen Wert zustande. Durch eine deutlich längere Messdauer könnte die zufällige Koinzidenzrate größere Werte annehmen, was deren Fehler verringern und somit die Genauigkeit weiter erhöhen würde.

5.2 Anisotropie

Die explizite Berechnung der Zählrate über den Quotienten aus der Anzahl der Ereignisse und des beobachteten Zeitintervalls ist nur zur Bestimmung der Auflösungszeit nötig. Da zur Berechnung der Anisotropie nur Quotienten der Zählraten berechnet werden, lässt sich der konstante Faktor von 800 s immer kürzen. Daher können sowohl Z_i und N_i als äquivalent angesehen, als auch nur die normierten Werte betrachtet werden.

5.2.1 Auswertung über alle Messreihen

Zunächst sollen alle Messreihen zusammen ausgewertet werden. Dazu werden die Koinzidenzraten und Zählraten der jeweiligen Winkel addiert und anschließend der Untergrund dreimal (einmal pro Messreihe) abgezogen. Der Fehler dieser Zählraten ist dabei jeweils durch die Wurzel der Summe aus Zählrate und dem dreifachen Hintergrund gegeben. Die korrigierte Koinzidenzrate wird wie oben beschrieben durch Teilen durch das Produkt der Einzelzählraten gebildet, wobei noch die korrigierte zufällige Koinzidenzrate N_z^{korr} abgezogen werden muss. Für deren Größe und Fehler gilt:

$$N_z^{\text{korr}} = \frac{N_z}{N_1' N_2'} = 3,011 \cdot 10^{-10} \quad (5.6)$$

$$\delta N_z^{\text{korr}} = N_z^{\text{korr}} \sqrt{\frac{1}{N_1'} + \frac{1}{N_2'} + \frac{1}{N_z}} = 1,738 \cdot 10^{-10} \quad (5.7)$$

Damit erhalten wir für die korrigierte Koinzidenzrate N_k^{korr} mit Fehler:

$$N_k^{\text{korr}} = \frac{N_k}{N_1 N_2} - N_z^{\text{korr}} \quad (5.8)$$

$$\delta N_k^{\text{korr}} = N_z^{\text{korr}} \sqrt{\left(\frac{\delta N_1}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_2}{N_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_k}{N_k}\right)^2 + (\delta N_z^{\text{korr}})^2} \quad (5.9)$$

Damit erhalten wir die Werte in Tabelle 3.

Tabelle 3: Messwerte für die Auswertung über alle Messreihen

Winkel	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate	korrigierte Koinzidenzrate (10^{-8})
90°	287085 ± 551	305875 ± 568	1078 ± 34	1,198 ± 0,037
135°	285893 ± 550	319565 ± 580	1158 ± 35	1,237 ± 0,037
180°	284116 ± 541	307658 ± 569	1273 ± 37	1,426 ± 0,041

Nach Gleichung (2.8) auf Seite 3 gilt für die Korrelationsfunktionen $K(\theta)$:

$$K(\theta) = \frac{N_k(\theta)}{N_k(90^\circ)} \quad (5.10)$$

Für den Fehler dieser Korrelationsfunktionen folgt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\delta K(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\partial K(\theta)}{\partial N_k(135^\circ)} \delta N_k(135^\circ)\right)^2 + \left(\frac{\partial K(\theta)}{\partial N_k(90^\circ)} \delta N_k(90^\circ)\right)^2} \quad (5.11)$$

$$= K(\theta) \sqrt{\left(\frac{\delta N_k(\theta)}{N_k(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_k(90^\circ)}{N_k(90^\circ)}\right)^2} \quad (5.12)$$

Damit können wir nun die Korrelationsfunktionen berechnen:

$$K(135^\circ) = 1,033 \pm 0,045 \quad (5.13)$$

$$K(180^\circ) = 1,191 \pm 0,050 \quad (5.14)$$

Über Gleichungen (2.14) und (2.15) auf Seite 4 lassen sich damit die Koeffizienten a_2 und a_4 sowie deren Fehler bestimmen:

$$a_2 = 4K(135^\circ) - K(180^\circ) - 3 \quad (5.15)$$

$$a_4 = -4K(135^\circ) + 2K(180^\circ) + 2 \quad (5.16)$$

$$\delta a_2 = \sqrt{(4\delta K(135^\circ))^2 + (\delta K(180^\circ))^2} \quad (5.17)$$

$$\delta a_4 = \sqrt{(4\delta K(135^\circ))^2 + (2\delta K(180^\circ))^2} \quad (5.18)$$

Damit erhalten wir für eben diese Koeffizienten:

$$a_2 = -0,05781 \pm 0,18413 \quad (5.19)$$

$$a_4 = 0,24881 \pm 0,20344 \quad (5.20)$$

Und damit ist deren Summe A_n mit Fehler aus Fehlerfortpflanzung durch Gleichung (2.10) auf Seite 4 gegeben:

$$A_n = 0,19100 \pm 0,27439 \quad (5.21)$$

Damit stimmen unsere Werte nur begrenzt mit den theoretischen Werten überein. Diese betragen für $a_2 = \frac{1}{8} = 0,125$ und für $a_4 = \frac{1}{24} = 0,041\bar{6}$. Zwar liegen diese Werte in dem Intervall, welches durch den Fehler gegeben ist, allerdings ist dieser auch etwa viermal so groß wie der eigentliche Messwert. Möglicherweise würde sich dieser Fehler durch eine deutlich längere Messdauer verringern lassen, da dabei das Verhältnis vom Fehler zur Zählrate geringer wird.

5.2.2 Getrennte Auswertung der Messreihen

Da die Auswertung aller Messdaten zusammen einen extrem großen Fehler aufweisen, wird im Folgenden eine getrennte Auswertung der einzelnen Messreihen durchgeführt. Die korrigierten Koinzidenzraten wurden bereits in der Tabelle im Abschnitt 4.2 auf Seite 6 berechnet. Dabei wurden die einzelnen Fehler wie oben in Gleichung (5.9) auf der vorherigen Seite berechnet. Weiter wurden die Korrelationsfunktionen, die Koeffizienten a_2 und a_4 und die Anisotropie A_n wie oben berechnet, allerdings getrennt für jede Messreihe.

1. Messreihe

Damit erhalten wir die Werte in Tabelle 4.

Tabelle 4: Messwerte für die getrennte Auswertung, erste Messreihe

Winkel	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate	korrigierte Koinzidenzrate (10^{-8})
90°	96154 ± 315	102177 ± 324	371 ± 20	3,746 ± 0,198
135°	95713 ± 314	106609 ± 331	420 ± 21	4,086 ± 0,202
180°	95301 ± 313	102491 ± 325	409 ± 21	4,157 ± 0,209

Und damit sind die Korrelationsfunktionen gegeben durch:

$$K(135^\circ) = 1,091 \pm 0,079 \quad (5.22)$$

$$K(180^\circ) = 1,110 \pm 0,081 \quad (5.23)$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten a_2 und a_4 :

$$a_2 = 0,25318 \pm 0,32501 \quad (5.24)$$

$$a_4 = -0,14342 \pm 0,35373 \quad (5.25)$$

Und damit ist deren Summe An mit Fehler aus Fehlerfortpflanzung durch Gleichung (2.10) auf Seite 4 gegeben:

$$An = 0,10976 \pm 0,48037 \quad (5.26)$$

2. Messreihe

Dafür erhalten wir die Werte in Tabelle 5.

Tabelle 5: Messwerte für die getrennte Auswertung, zweite Messreihe

Winkel	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate	korrigierte Koinzidenzrate (10^{-8})
90°	95784 ± 314	101956 ± 324	348 ± 19	3,533 ± 0,192
135°	94745 ± 312	107004 ± 332	363 ± 20	3,550 ± 0,189
180°	94865 ± 313	103038 ± 326	436 ± 21	4,430 ± 0,215

Wodurch die Korrelationsfunktionen gegeben sind durch:

$$K(135^\circ) = 1,005 \pm 0,077 \quad (5.27)$$

$$K(180^\circ) = 1,254 \pm 0,092 \quad (5.28)$$

Und damit erhalten wir für die Koeffizienten a_2 und a_4 :

$$a_2 = -0,23453 \pm 0,31894 \quad (5.29)$$

$$a_4 = 0,48841 \pm 0,35601 \quad (5.30)$$

Und damit erhalten wir deren Summe An mit Fehler:

$$An = 0,25387 \pm 0,47798 \quad (5.31)$$

Tabelle 6: Messwerte für die getrennte Auswertung, dritte Messreihe

Winkel	Zähler 1	Zähler 2	Koinzidenzrate	korrigierte Koinzidenzrate (10^{-8})
90°	95147 ± 313	101742 ± 324	359 ± 20	3,678 ± 0,197
135°	95435 ± 314	105952 ± 330	375 ± 20	3,679 ± 0,193
180°	93950 ± 311	102129 ± 324	428 ± 21	4,431 ± 0,217

3. Messreihe

Hierfür erhalten wir die Werte in Tabelle 6.

Damit sind die Korrelationsfunktionen gegeben durch:

$$K(135^\circ) = 1,000 \pm 0,075 \quad (5.32)$$

$$K(180^\circ) = 1,204 \pm 0,088 \quad (5.33)$$

Womit wir für die Koeffizienten a_2 und a_4 erhalten:

$$a_2 = 0,20433 \pm 0,31176 \quad (5.34)$$

$$a_4 = -0,40881 \pm 0,34652 \quad (5.35)$$

Und somit ist deren Summe An mit Fehler gegeben:

$$An = 0,20448 \pm 0,46612 \quad (5.36)$$

Zusammenfassung

Damit erhalten wir also die Werte in Tabelle 7 für die einzelnen Messreihen.

Tabelle 7: Ergebnisse der getrennten Auswertung

Messreihe	a_2	a_4	An
1	0,25318 ± 0,32501	-0,14342 ± 0,35373	0,10976 ± 0,48037
2	-0,23453 ± 0,31894	0,48841 ± 0,35601	0,25387 ± 0,47798
3	0,20433 ± 0,31176	-0,40881 ± 0,34652	0,20448 ± 0,46612

Damit kann nun durch Mitteln ein Endergebnis angegeben. Zusätzlich ist noch der statistische Fehler des Mittelwertes sowie der statistische Fehler aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$a_2 = -0,06190 \pm 0,15778 \pm 0,18396 \quad (5.37)$$

$$a_4 = 0,25127 \pm 0,19868 \pm 0,20329 \quad (5.38)$$

$$An = 0,18937 \pm 0,04229 \pm 0,27417 \quad (5.39)$$

5.2.3 Vergleich und Fazit

Der Vergleich der beiden Auswertungsmethoden untereinander und mit der Theorie ist in Tabelle 8 auf der nächsten Seite dargestellt. Dabei ist der Fehler der gesamten Auswertung der durch Gaußscher Fehlerfortpflanzung ermittelte Fehler. Die Fehler der einzelnen Auswertung sind der statistische Fehler des Mittelwertes und der aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung ermittelte Fehler.

Tabelle 8: Alle Ergebnisse der beiden Auswertungsmethoden

	Gesamte Auswertung (mit Fehler)	Einzelne Auswertung (mit Mittelwert- und fortgepflanztem Fehler)	Theoretischer Wert
a_2	$-0,05781 \pm 0,18413$	$-0,06190 \pm 0,15778 \pm 0,18396$	0,125
a_4	$0,24881 \pm 0,20344$	$0,25127 \pm 0,19868 \pm 0,20329$	$0,041\bar{6}$
An	$0,19100 \pm 0,27439$	$0,18937 \pm 0,04229 \pm 0,27417$	$0,1\bar{6}$

Es zeigt sich, dass wir für die beiden Koeffizienten a_2 und a_4 mit beiden Auswertungsmethoden ähnliche Werte mit vergleichbaren Fehlern bekommen. Zwar liegen die theoretischen Werte im Fehlerintervall, was aber nur daran liegt, dass eben diese extrem hoch sind. Ansonsten haben die Werte nicht viel mit den theoretischen gemeinsam.

Interessanterweise stimmt im Vergleich dazu unser Wert für die Anisotropie gut mit dem theoretischen Wert überein, er liegt sogar im Vertrauensintervall des statistischen Fehlers des Mittelwerts der Einzelauswertung. Der statistische Fehler aus Fehlerfortpflanzung dagegen ist auch hier deutlich größer als der Wert selbst.

Möglicherweise nähert sich die Anisotropie bei weiteren Messungen weiter dem theoretischen Wert an, wozu weitere Messreihen von Nöten wären. Wenn dies dann allerdings nicht der Fall ist, wäre es eventuell an der Zeit, die Messapparatur zu überdenken.