Praktikum Klassische Physik II

Versuchsvorbereitung:

Wärmestrahlung

(P2-43)

Christian Buntin, Jingfan Ye

*Gruppe **Mo-11***

Karlsruhe, 31. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Das Plancksche Strahlungsgesetz

Herleitung nach Einstein (mit einem 2-Niveau-System)

Zuerst betrachte man ein 2-Energieniveau-System. Im Niveau 1 befinden sich N_1 Teilchen mit jeweils Energie E_1 und im Niveau 2 befinden sich N_2 Teilchen jeweils mit Energie E_2. Die Verteilungsstatistik folgt der Boltzmann-Statistik:

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \tag{0.1}$$

Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur, die das System innehat. Die Gesamtzahl N der Teilchen muss im zeitlichen Verlauf konstant sein, sie können lediglich in das andere Energieniveau wechseln. Die Teilchen zunahme eines Niveaus führt also zu einer gleichgroßen Abnahme des anderen Niveaus:

$$N_1 + N_2 = N \qquad \mathrm{d}N_1 = -\,\mathrm{d}N_2$$

Der Wechsel vom niedrigeren in das höhere Energieniveau werden Photonen absorbiert. Der Wechsel vom höheren auf das niedrigere Niveau erfolgt durch stimulierte und spontane Emissionen von Photonen. Für die Teilchenänderung des höheren Energieniveaus 2 gilt also:

$$\mathrm{d}N_2 = \underbrace{B_{12}(\nu) \cdot u(\nu, T) \cdot N_1\,\mathrm{d}t}_{\text{Absorption}} - \underbrace{B_{21}(\nu) \cdot u(\nu, T) \cdot N_2\,\mathrm{d}t}_{\text{stimulierte Emission}} - \underbrace{A_{21}(\nu) \cdot N_2\,\mathrm{d}t}_{\text{spontane Emission}} \tag{0.2}$$

Dabei ist die Absorption proportional zur Anzahl unangeregter Teilchen N_1 sowie zur Strahlungsintensität $u(\nu, T)$. Die stimulierte Emission ist genau der Gegenspieler der Absorption, sie ist proportional zur Anzahl der angeregten Teilchen N_2 und ebenfalls zur Strahlungsintensität (andere Photonen regen ja diese Emission an). Die spontane Emission ist, wie der Name schon sagt, völlig unabhängig von der Strahlungsintensität und hängt lediglich von der Anzahl der angeregten Teilchen ab. B_{12}, B_{21} sowie A_{21} sind lediglich Proportionalitätskonstanten. Diese sind zeitlich konstant für eine Frequenz der Photonen, können sich aber bei Variation der Frequenz auch verändern. Da die stimulierte Emission genau der umgekehrte Fall wie die Absorption ist, müssen ihre Proportionalitätskonstanten gleich sein, also $B_{12} = B_{21}$. Im Folgenden wird A_{12} mit A und $B_{12} = B_{21}$ mit B abgekürzt, ihre Abhängigkeit von der Frequenz wird auch nicht mehr explizit aufgeschrieben.

Im Gleichgewicht gilt $\mathrm{d}N_2 = 0$. Daraus folgt mit Gleichung (0.2):

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{Bu(\nu, T)}{A + Bu(\nu, T)}$$

Die emittieren Photonen besitzen genau die Energiedifferenz der Niveaus:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu$$

Setzt man nun diese Erkenntnisse in Gleichung (0.1) ein, so erhält man:

$$\mathrm{e}^{\frac{-h\nu}{k_B T}} = \frac{Bu(\nu, T)}{A + Bu(\nu, T)}$$

Stellt man diese Gleichung nach der Strahlungsintensität $u(\nu, T)$ um, so erhält man:

$$u(\nu, T) = \frac{A}{B\mathrm{e}^{\frac{h\nu,T}{k_B T}} - B} = \frac{A}{B} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}_{\text{Bose-Einstein-Statistik}}$$

Also Konstante $\frac{A}{B}$ ergibt sich, bei Betrachtung vom Eigenschwingungsspektrum (stehende Wellen) eines Hohlraumes:

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi}{\lambda^2}\frac{1}{c} \cdot h\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot h\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

λ ist die Wellenlänge der Photonen, c die Lichtgeschwindigkeit. Die Formel gibt Anzahl der erlaubten Schwingungszustände pro Volumeneinheit, multipliziert mit der Energie $h\nu$ bei der jeweiligen Frequenz an. Sie nimmt mit größerer Frequenz zu, da es für stehende Wellen bei höherer Frequenz mehr Möglichkeiten gibt, sich im Hohlraum einzupassen.

Aus allem folgt nun das Plancksche Strahlungsgesetz:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{0.3}$$

Das Ergebnis ist also das Produkt aus der Bose-Einstein-Statistik, die durch ein 2-Niveau-System hergeleitet wurde, mit der Energie bei der jeweiligen Frequenz sowie der Möglichkeiten, stehende Wellen in Hohlraum bei dieser Frequenz zu erzeugen. Die Bose-Einstein-Statistik über die Verteilung der Teilchen auf die Verschiedenen Energieniveaus verhindert die Ultraviolettkatastrophe. Nach ihr würden die Teilchen aufgrund der steigenden Besetzungsmöglichkeiten und bei gleicher Besetzungswahrscheinlichkeit bei höheren Frequenzen sehr viele Teilchen eine hohe Energie besitzen, sodass die Gesamtenergie gegen unendlich geht. Die Bose-Einstein-Statistik gibt aber das wahre Besetzungsverhältnis an, nach der es zwar in den höheren Energieniveaus sehr viele Besetungsmöglichkeiten gibt, die Wahrscheinlichkeit, dort ein Teilchen zu finden, jedoch sehr gering ist.

u gibt also die Energiedichte u eines schwarzen Körpers bei einer bestimmten Frequenz ν und Temperatur T an.

Korollare: Das Stefan-Boltzmann-Gesetz und das Wien'sche Verschiebungsgesetz

Im vorherigen Abschnitt wurde die Formel für Energiedichte eines schwarzen Körpers hergeleitet. Um die spezifische Strahlungsleistung eines Schwarzen Körpers der normieren Oberfläche von 1 m^2 in einem Frequenzintervall zu berechnen, muss man die Formel lediglich mit c multiplizieren und über dem gewünschten Frequenzintervall sowie über dem Halbraum, in den gestrahlt wird, integrieren. Wenn man nun über alle Frequenzen integriert, erhält man also die gesamte abgestrahlte Strahlungsleistung bei einer bestimmten Temperatur.

Um sich den Faktor c zu erklären, stelle man sich einen Hohlraum innerhalb von Wänden der Temperatur T vor. Damit die Energie im Gleichgewicht steht, müssen die Wände genauso viel Energie absorbieren wie emittieren. Die emittierte Energiedichte $u(\nu, T)$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit c auf eine andere Wand zu. Sie strahlt also mit der Intensität $cu(\nu, T)$. Diese Wand absorbiert und strahlt ebenso viel Energie wieder ab, um das Gleichgewicht zu erhalten.

Nun wird eine strahlende Kugel mit einer normierten Oberfläche von 1 betrachtet. Man muss also über den gesamten Raumwinkel (in Kugelkoordinaten) integrieren. Da die Einheitskugel (Radius = 1) die Oberfläche 4π besitzt, muss man hier folglich durch 4π teilen, um den Radius der Funktionaldeterminante von Kugelkoordinaten auf 1 zu setzen.

Schließlich muss man noch beachten, dass die ausgestrahlten Photonen nicht immer radial nach außen zeigen, sondern ihre Richtung statistisch verteilt ist. Der eingeschlossene Winkel zwischen normierten Radialvektor und dem normierten Geschwindigkeitsvektor der Photonen entspricht genau θ, weshalb man, nach den Regeln für das Skalarprodukt zweier Vektoren, ein $\cos\theta$ in die Gleichung multiplizieren muss.

$$P_K(T) = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \cos\theta \int_0^{\infty} u(\nu, T)\, \mathrm{d}\nu = \frac{c}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\, \mathrm{d}\nu$$

Da die Rechnung keine physikalischen Erkenntnisse bringt, wird in dieser Vorbereitung auf sie verzichtet und stattdessen gleich das Ergebnis präsentiert:

$$P_K(T) = \frac{4\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4$$

Da nur die Strahlung nach außen, also in einen Halbraum von Interesse ist, muss der Vorfaktor durch 2 geteilt werden. Außerdem wurde bisher nur eine normierte Oberfläche von 1 m^2 betrachtet. Es ist bekannt, dass sich die Strahlungsleistung proportional zur Oberfläche A verhält, deswegen folgt für allgemeine Oberflächen:

$$P(T) = \sigma A \cdot T^4 \qquad \sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4} \tag{0.4}$$

Diese Formel, also gesamte Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit der Temperatur, nennt man auch **Stefan-Boltzmann-Gesetz**. σ heißt Stefan-Boltzmann-Konstante. Die Strahlungsleistung eines Schwarzen Körpers ist also proportional zur 4. Potenz der Temperatur.

Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz kann man noch ein wichtiges Gesetz herauslesen, und zwar das **Wien'sche Verschiebungsgesetz**. Dieses gibt an, bei welcher Frequenz ν ein Körper der vorgegebenen Temperatur T am meisten Energie abstrahlt.

Wie oben bereits gesehen, steht zwischen der Strahlungsintensität und der Energiedichte (Plancksche Formel) nur ein konstanter Faktor. Man kann also die Frequenz, bei der die Intensität am höchsten ist, erhalten, indem man Gleichung (0.3) auf der vorherigen Seite nach ν abgeleitet und gleich 0 setzt. Die erhaltene Gleichung kann man nicht analytisch lösen, da man eine Summe aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion erhält, die gleich 0 sein muss. Numerisch erhält man aber folgende Beziehung für die Frequenz mit der maximalen Intensität:

$$\nu_{\max} = \frac{2{,}82 \cdot k_B}{h} T = 5{,}88 \cdot 10^{10} T \qquad \nu \text{ in Hz},\ T \text{ in K} \tag{0.5}$$

Die Frequenz mit der maximalen Intensität verhält sich also proportional nach Temperatur des Schwarzen Körpers.

1 Gültigkeit des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit der Stefan-Boltzmann-Gesetzes, vor allem aber die T^4-Abhängigkeit der Strahlungsleistung überprüft werden. Zur Temperaturmessung des Strahlers wird ein eingebautes PtRh$-$Pt-Thermoelement und ein Millivoltmeter benutzt. Zum Vergleich der Strahlungsleistungen wird eine Mollsche Thermosäule mit einem Millivoltmeter verwendet. Um die Empfindlichkeit der Thermosäule zu steigern, wurden Reflektoren eingebaut. Dies führt aber dazu, dass der Vorfaktor des Stefan-Boltzmann-Gesetzes stark von der Geometrie abhängt. In diesem Versuch wird also lediglich die T^4-Abhängigkeit überprüft.

Man muss beachten, dass die Umgebung mit der Umgebungstemperatur T_U ebenfalls strahlt und bei $T = T_U$, wobei T die Temperatur des Strahlers ist, ein Gleichgewicht zwischen Absorption und Emission herrscht. Für die zusätzliche Strahlungsleistung des Strahlers muss die Strahlleistung der Umgebung abgezogen werden. Dafür wird die Temperatur ΔT definiert, für die gilt $\Delta T^4 = T^4 - T_U^4$.

Durch eine logarithmische Auftragung erreicht man, dass die Steigung dem Exponenten entspricht. Es gilt nämlich:

$$P = \sigma A \cdot \Delta T^4 \Rightarrow \ln(P) = \ln(\sigma A \cdot \Delta T^4) = 4\ln(\Delta T) + \underbrace{\ln(\sigma A)}_{\text{const}} \tag{1.1}$$

Es wird also eine Steigung von 4 erwartet. Zusätzlich wird versucht, eine möglichst gleichmäßig steigende Strahlungsleistung zu bekommen. Dies wird dadurch erreicht, indem man für den nächsten Messwert die Temperatur nur um die Vierte Wurzel des Faktors erhöht, um die man die Strahlungsleistung erhöhen möchte.

2 Vergleich verschiedener Strahlungsflächen

In diesem Versuch soll untersucht werden, wie das Modell des Schwarzen Körpers auf reale Materialien zutrifft und welche Materialien besonders gute Schwarze Strahler sind. Schwarze Strahler sind bekanntlich die besten Absorpter und Strahler. Alle realen Materialien haben nur einen Bruchteil der Strahlungs- und Absorptionsleistung des Schwarzen Körpers. Dieser Bruchteil wird hier ε genannt:

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{real}}}{P_{\text{ideal}}} \tag{2.1}$$

P_{ideal} ist die Strahlungsleistung des schwarzen Körpers. Der Versuchsaufbau entspricht der im Versuch 1. Der näherungsweise Schwarze Strahler aus Aufgabe 1 wird nun durch verschiedene beheizte Oberflächensektoren ersetzt.

3 Wahre Temperatur einer Glühlampe mit Hilfe eine Pyrometers

Mit einem Pyrometer wird die Temperatur eines Körpers gemessen, indem man ihre abgestrahlte Leistung misst und mit den Strahlungsgesetzen auf die Temperatur zurückschließt. Die zu untersuchende strahlende Fläche wird mit Hilfe einer Linse auf eine Ebene im Pyrometer abgebildet, in der sich die Glühwendel befindet, die man elektrisch erhitzen kann. Den Stromfluss kann man mit einem Potentiometer regeln. Man beobachtet nun beide Objekte, die Glühwendel und die strahlende Oberfläche durch einen Rotfilter. Je mehr Strom man durch die Glühwendel fließen lässt, desto wärmer wird sie und desto mehr nähert sie sich der Temperatur der zu untersuchenden Oberfläche an. Während sie am Anfang noch das Licht der Oberfläche blockiert, verschwindet sie allmählich aufgrund der eigenen Abstrahlung vor der Oberfläche, und ist nicht mehr zu erkennen, wenn beide Temperaturen gleich sind, dann strahlen nämlich beide Objekte gleich ab.

Das Pyrometer ist in dieser Aufgabe auf einen Schwarzen Strahler kalibriert. Da aber reale Materialien (hier Wolfram) bei gleicher Temperatur weniger abstrahlen, muss die Temperatur höher sein, damit die Strahlungsleistung eines Schwarzen Körpers erreicht wird. Diese höhere Temperatur nennt man deshalb wahre Temperatur T_W, während die leistungsäquivalente Schwarzkörpertemperatur Schwarze Temperatur T_S genannt wird.

In der Versuchsanweisung sind die Korrekturgrößen $T_W - T_S$ für Wolfram, die zudem von der Wellenlänge und der Temperatur abhängig ist, in einer Tabelle abgebildet. Mit dem Pyrometer wird die Schwarze Temperatur gemessen, mit dem Korrekturterm kann dann auf die wahre Temperatur geschlossen werden, die der Temperatur des zu untersuchenden Objekts entspricht.