

Versuchsvorbereitung: Gammaspektroskopie und Statistik

(P2-72,73,83)

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 21. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

0	Theoretische Grundlagen	2
0.1	Gammastrahlen	2
0.2	Wechselwirkungen mit Materie	2
0.2.1	Comptoneffekt	2
0.2.2	Photoeffekt	2
0.2.3	Paarbildung	3
0.3	Detektor	3
0.4	Spektrum	3
1	Impulshöhenspektren	4
1.1	Messung im Einkanalbetrieb	4
1.2	Messung im 1024-Kanalbetrieb	4
1.3	Deutung	5
2	Aktivität	5
3	Röntgenemission	5
3.1	Kalibrierung	6
3.2	Bestimmung eines unbekanntes Elements	6
4	Statistische Verteilungen	6
4.1	Messungen	6
4.2	Berechnung statistischer Größen	6
4.3	Graphische Darstellung	7
4.4	χ^2 -Test	7

0 Theoretische Grundlagen

0.1 Gammastrahlen

Bei diesen Versuchen wird mit γ -Strahlung gearbeitet. Diese hat, wie auch α - und β -Strahlung, im Zerfall von radioaktiven Nukliden ihren Ursprung. Im Gegensatz zu diesen bestehen γ -Strahlen allerdings aus Photonen und nicht aus Heliumkernen (α -Strahlung) oder Elektronen (β -Strahlung), sie haben also keine Ruhemasse. Daher besitzen sie eine deutlich höhere Eindringtiefe in Materie als andere Strahlen.

0.2 Wechselwirkungen mit Materie

Es existieren drei Arten, auf denen γ -Strahlen mit Materie wechselwirken: Der *Comptoneffekt*, der *Photoeffekt* und die *Paarbildung*.

0.2.1 Comptoneffekt

Der Comptoneffekt lässt sich an den äußeren Elektronen eines Atoms beobachten, da deren Bindung zum Kern nur schwach ist und diese damit als quasi frei betrachtet werden können. Eben deshalb gelten dort für Elektron und Photon die Energie- und Impulserhaltung, was zu einem klassischen Stoßverhalten führt. Durch diese Wechselwirkung, quasi dem Stoß, überträgt das Photon also einen Teil seiner Energie auf das Elektron, was wegen $E = h\nu$ zu einer Änderung der Wellenlänge des Photons um

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\phi) \quad (0.1)$$

und zu einer Ablenkung um den Winkel ϕ führt. Daraus folgt sofort, dass sich die Wellenlänge des Photons maximal um $2\frac{h}{m_e c}$ ändert, nämlich dann, wenn es zurück gestreut wird.

Der Comptoneffekt tritt eher bei geringer Photonenenergie und bei Atomen mit hoher Kernladungszahl auf, da diese mehr Elektronen besitzen.

0.2.2 Photoeffekt

Der Photoeffekt tritt auch bei geringer Photonenenergie und hoher Kernladungszahl auf, aber im Gegensatz zum Comptoneffekt bei Elektronen nahe des Atomkerns. Denn beim Photoeffekt geht die gesamte Energie des Photons $h\nu$, abzüglich der Austrittsarbeit W_A des Elektrons, in kinetische Energie des Elektrons über, weshalb der Kern den Rückstoß aufnehmen muss, um die Impulserhaltung nicht zu verletzen:

$$h\nu = E_{\text{kin}} - W_A.$$

Wenn durch diesen Prozess ein Elektron nahe des Kerns herausgeschlagen wird, so wird diese Lücke sehr schnell wieder von einem Elektronen aus der äußeren Hülle besetzt. Dieses emittiert dabei wieder ein Photon, welches wieder zum Photo- oder Comptoneffekt führen kann, sodass am Ende die Gesamtenergie aller angeregten Elektronen der Energie des ursprünglich anregenden Photons entspricht.

0.2.3 Paarbildung

Paarbildung kann auftreten, wenn das γ -Photon als Energie mindestens die doppelte Ruheenergie eines Elektrons besitzt:

$$E = 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV.}$$

Für diesen Prozess muss das Photon mit dem elektrischen Feld eines Atoms wechselwirken, wodurch daraufhin fast die gesamte Energie des Photons in die Ruhemasse eines Elektrons und eines Positrons und deren kinetische Energie umgewandelt wird. Diese beiden Teilchen können nun selbst Atome anregen, allerdings zerfallen Positron und Elektron beim Aufeinandertreffen in zwei Photonen, welche allerdings wieder weiter wechselwirken können.

Aufgrund der hohen dazu benötigten Energie spielt die Paarbildung hier im Versuch allerdings keine Rolle.

0.3 Detektor

Um die bei diesem Versuch entstehenden γ -Quanten zu messen, wird ein Natriumiodid-Einkristall verwendet, welcher mit Thallium dotiert wurde. Dieser Kristall ist so dimensioniert, dass die γ -Quanten mit ausreichender Wahrscheinlichkeit mit den Aktivatoren (hier das Thallium) wechselwirken und freie Elektronen erzeugen. Diese wiederum geben ihre Energie portionsweise durch Ionisierung oder Anregung an die anderen Atome des Kristalls ab, welche dadurch Photonen emittieren.

Diese Photonen treffen nun aufgrund einer den Kristall fast ganz umschließenden reflektierenden Schicht auf eine Photokathode, aus der sie Photoelektronen auslösen. Dabei handelt es sich hier, anders als bei den γ -Quanten, bei denen Elektronen nahe des Atomkerns herausgeschlagen wurden, nicht um den inneren, sondern um den äußeren Photoeffekt, da die Elektronen aus dem Elektronengas eines Metalls mit sehr geringer Austrittsarbeit kommen.

Diese Elektronen werden durch einen Photomultiplier verstärkt, indem sie auf eine Serie von Parallelplatten (Dynoden) mit jeweils deutlich höherem Potential treffen und dort wiederum jeweils einige Elektronen auslösen. Bei dem verwendeten Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) mit 14 Dynoden ergibt sich dadurch eine Verstärkung von ungefähr einer Milliarden.

Da alle Vorgänge proportional zur Energie des einfallenden γ -Quanten ablaufen, erhält man am SEV ein Spannungssignal, welches auch proportional zur Energie des einfallenden γ -Quanten ist.

0.4 Spektrum

In einem Spektrum werden die Häufigkeiten von Energien über diese aufgetragen, sodass man ablesen kann, welche Energie mit welcher Wahrscheinlichkeit aufgetreten ist. Um dieses Spektrum zu erzeugen, wird die Spannung des SEV, welche proportional zur Energie ist, in eine bestimmte Anzahl einzelner Intervalle gleicher Breite zerlegt, den Kanälen. Jeder Kanal speichert die Anzahl der Spannungsimpulse zu seiner Spannung. Dabei wird diese in kurzen Zeitabständen gemessen und jeweils die Anzahl der Impulse des betreffenden Kanals erhöht. Daher bezeichnet man dieses Spektrum als *Impulshöhenspektrum*.

Im Spektrum treten neben dem Photopeak, welche der Energie eines γ -Quanten entspricht, da diese komplett durch den inneren Photoeffekt auf ein Elektron übertragen wurde, noch weitere Peaks und Effekte auf:

- Wenn die Quanten bereits außerhalb des Kristalls, beispielsweise in der Fassung des γ -Strahlers wechselwirken und dann in den Kristall gestreut werden, besitzen sie eine deutlich geringere Energie, welche als *Rückstreuppeak* wahrgenommen wird. Da dies eben die Energie der Quanten abzüglich der Energie für den Comptoneffekt ist, wird sich dieser Peak an der Stelle des Photopeakes abzüglich der maximalen Comptonenergie finden lassen.
- Da die maximale Wellenlängenänderung nach Gleichung (0.1) auf Seite 2 begrenzt ist, treten im Kristall nur Compton-Elektronen bis zu einer bestimmten Energie auf. Danach nehmen die Einflüsse des Comptoneffektes scharf ab, man spricht von der sogenannten *Compton-Kante*. Für diese gilt nach $E_\nu = h\nu$ und nach der Energieerhaltung:

$$E_{\text{Compton}} = E_\nu \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_\nu}{m_e c^2}} \right).$$

- Wenn ein Teil der Energie den Detektor verlässt, so wird nur die verbleibende Energie im Detektor registriert und das Ereignis einer viel zu niedrigen Energie zugeordnet. Daher werden diese Spektrallinien auch als *Escape-Peaks* bezeichnet. Dies kann beispielsweise bei der Paarbildung auftreten, wenn die beim Aufeinandertreffen von Positron und Elektron entstehenden Quanten den Detektor verlassen können.
- Es ist möglich, dass das aus dem Zerfall von ^{137}Cs entstandene angeregte ^{137}Ba die Anregungsenergie abzüglich der Bindungsenergie durch innere Konversion auf ein kernnahes Elektron überträgt, welches damit das Atom verlässt. Wenn nun ein Elektron aus einer höheren Schale nachrückt, so wird ein Röntgenquant emittiert, was im Spektrum bei geringer Energie als *Röntgenlinie* bei 32 keV wahrgenommen wird.

Da die auftretenden Effekte aufgrund der Messapparatur alle einer gewissen statistischen Verteilung unterliegen (beispielsweise der SEV), erhält man keine scharfen Peaks sondern ein verwaschenes Spektrum.

1 Impulshöhenspektren

1.1 Messung im Einkanalbetrieb

Es soll das Impulshöhenspektrum von ^{137}Cs aufgenommen werden. Dabei werden für jedes Intervall einzeln die Impulse in einem festen Zeitfenster gezählt.

1.2 Messung im 1024-Kanalbetrieb

Wieder sollen die Impulshöhenspektren gemessen werden, allerdings diesmal mit allen 1024 Kanälen gleichzeitig.

Es werden die Spektren von ^{137}Cs , ^{22}Na und ^{60}Co sowie das Untergrundspektrum (ohne Strahlungsquelle) aufgenommen.

1.3 Deutung

Mittels der erwarteten Energie des Photopeaks von ^{137}Cs wird eine Kalibrierung der Energie-Achse durchgeführt. Damit werden dann die Stellen mit Besonderheiten in den Diagrammen mit den theoretischen Werten verglichen (Tabelle 1).

Quelle:	^{137}Cs	^{22}Na	^{60}Co	^{241}Am	^{57}Co
Photopeak [keV]:	662	511 und 1275	1173 und 1333	59,5	122
Comptonkante [keV]:	478	341 und 1062	963 und 1119	11,2	39
Rückstreupeak [keV]:	184	170 und 213	210 und 214	48,3	83
Röntgenlinie [keV]:	32	–	–	–	–

Tabelle 1: Theoretische Werte der erwarteten markanten Stellen im Impulshöhendiagramm

Auch soll die energieabhängige Auflösung des Spektrometers untersucht werden. Diese ist definiert als Quotient von Halbwertsbreite ΔE des Photopeaks und deren Mittelenergie E . Da dieser äquivalent zum Verhältnis der Elektronenzahlen an der Photokathode $\frac{\Delta n_e}{n_e}$ ist, gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n_e}} = \frac{\Delta n_e}{n_e} = \frac{\Delta E}{E} \quad \Leftrightarrow \quad n_e = \left(\frac{E}{\Delta E} \right)^2.$$

Damit erhält man die Anzahl n_e der Elektronen, die bei einem Photopeak-Impuls von der Photokathode emittiert wurden. Diese Zahl charakterisiert die Auflösung des Detektors.

2 Aktivität

Die Aktivität einer Quelle gibt die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde an. Um diese zu bestimmen, müssen somit nur die Zerfälle in einem bestimmten Zeitintervall gezählt werden. Allerdings kommen im Detektor nicht alle Quanten an oder sie wechselwirken nicht in diesem. Daher muss die vom Detektor registrierte Aktivität noch durch die aus Abbildung 4 der Vorbereitungshilfe zu bestimmenden Konstante geteilt werden, um die tatsächliche Aktivität zu erhalten.

3 Röntgenemission

Mittels der γ -Quanten lässt sich an schweren, nicht-radioaktiven Materialien Röntgenstrahlung erzeugen. Dabei wird eines der Elektronen der inneren Schale n_1 herausgeschlagen. Die Elektronen der höheren Schale n_2 rücken dann nach und emittieren dabei Röntgenquanten. Die Energie dieser Röntgenquanten lässt sich mit dem *Moseleyschen Gesetz* berechnen:

$$E = h\nu = (Z - S)^2 \cdot R_y c \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

mit der Rydberg-Konstanten R_y , der Vakuumlichtgeschwindigkeit c , der Ordnungszahl Z des Elements und der Abschirmungskonstanten S , wobei wir $Z - S$ als effektive Kernladung Z_{eff} bezeichnen. Beim hier beobachteten K_α -Übergang ist $S \approx 1$. Damit folgt:

$$E \propto Z_{\text{eff}}^2 = (Z - S)^2$$

und mit Näherung für große Z :

$$E \propto Z^2 \tag{3.1}$$

3.1 Kalibrierung

Mittels der Messung der Energie der Röntgenquanten an Materialien mit bekannter Kernladung lässt sich der Proportionalitätsfaktor in Gleichung (3.1) auf der vorherigen Seite ermitteln.

3.2 Bestimmung eines unbekanntes Elements

Mittels Messung der Energie der Röntgenquanten und des Proportionalitätsfaktors der letzten Aufgabe lässt sich die Kernladungszahl und somit auch das unbekanntes Element selbst bestimmen.

4 Statistische Verteilungen

Hier soll gezeigt werden, dass der radioaktive Zerfall zufällig verteilt ist.

4.1 Messungen

Es werden mindestens 150 Spektren mit 256 Kanälen gemessen, um genügend Daten zu erhalten. Aus diesen Daten werden zwei Stichproben genommen:

- a) Die Zählrate aus einem Teil des Spektrums, sodass der Mittelwert 3 beträgt
- b) Die Gesamtzählrate der einzelnen Spektren

Die Häufigkeitsverteilung dieser Stichproben soll untersucht werden.

4.2 Berechnung statistischer Größen

Zu den Stichproben sollen folgende statistische Größen berechnet werden:

- 1.) Mittelwert: Dieser ist definiert als die Summe der Messwerte x_i geteilt durch deren Anzahl N :

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- 2.) Standardabweichung: Quadratwurzel der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}$$

- 3.) Standardabweichung des Mittelwerts:

$$s_{x_m} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Es soll zusätzlich untersucht werden, ob $s = \sqrt{x_m}$ erfüllt ist, da dies bei einer Poisson-Verteilung der Fall wäre.

4.3 Graphische Darstellung

Die Häufigkeitsverteilungen der Stichproben werden graphisch dargestellt und die aus den statistischen Größen der letzten Aufgabe berechnete Gauß- und Poissonverteilung eingezeichnet. Für die Poissonverteilung gilt:

$$P_P(x) = \frac{x_m^x e^{-x_m}}{x!}$$

und für die Gaußverteilung:

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2s^2}}$$

Die Poissonverteilung geht für große x_m in die Gaußverteilung über.

4.4 χ^2 -Test

Mit Hilfe des χ^2 -Tests lässt sich feststellen, ob eine tatsächliche Verteilung einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht oder nicht. Für χ^2 gilt:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(n_j - n_{j,t})^2}{n_{j,t}}$$

mit den experimentell ermittelten Häufigkeiten n_j und den theoretischen Häufigkeiten $n_{j,t}$.

Mit der Anzahl $FN = N - 1$ der Freiheitsgrade und einer Irrtumswahrscheinlichkeit α lässt sich durch Vergleichen der berechneten χ^2 -Werte mit denen aus der Tabelle in der Vorbereitungshilfe auf Seite 5 bestimmen, ob die experimentellen Messwerte die theoretische Verteilung erfüllen. Dies ist der Fall, wenn der berechnete χ^2 -Wert kleiner als der vorgegebene ist. Anderenfalls trifft die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht zu.

Dieser Test wird auf die Messwerte mit der Poisson- und der Gauß-Verteilung angewendet.