Praktikum Klassische Physik I

Versuchsauswertung: P1-83,84: Ferromagnetische Hysteresis

Christian Buntin, Jingfan Ye
Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 23. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Induktivität und Verlustwiderstand einer Luftspule

1.1 Messung

Wir verbanden die Spule mit $n = 1000$ Windungen mit einer Wechselspannungsquelle der Frequenz $f = 50$ Hz und schalteten dazu einen 10 Ω Widerstand in Reihe.

In dieser Anordnung führten wir zwei Messungen durch, einmal mit der Effektivstromstärke $I_{\text{eff}} = 300$ mA und das zweite mal mit $I_{\text{eff}} = 30$ mA. Dabei maßen wir die Stromstärke mit einem in Reihe geschalteten analogen Amperemeter.

Die Spannung der Spule und des Widerstands griffen wir mit einem Oszilloskop ab, welches die gemessenen Daten gleich an einen nebenstehenden Computer weiterleitete. Auf dem Bildschirm erschienen zwei sinusförmige Kurven für die zeitliche Spannungsentwicklung des Widerstands und der Spule. Glücklicherweise konnte man in dem Programm, welches die Kurven anzeigte, waagerechte und lotrechte Balken entlang den Achsen ziehen, zu denen das Programm sofort den Achsenwert angab. Wir zogen immer zwei solcher parallelen Balken jeweils zum oberen und zum unteren Spitzenwert der Spannung und lasen die Differenz ab, die dem doppelten Spitzenwert $2\hat{U}$ entspricht. Auf diese Weise bestimmten wir $\hat{U}$ von Spule und Widerstand.

Da das Oszilloskop nur einen Ground-Anschluss besaß, mussten wir beide Eingänge, also den für die Spule und den für den Widerstand, am selben Ort erden. Da dadurch eines der beiden Anschlüsse sozusagen falschherum eingesteckt werden musste, maß das Oszilloskop das invertierte Signal. Am Oszilloskop konnten wir mit einem Knopf die falsche Kurve wieder richtig invertieren.

Aus der Zeitverschiebung Δt ließ sich dann die Phasenverschiebung φ über die Formel aus der Vorbereitung bestimmen:

$$\varphi = 2\pi f \Delta t \tag{1}$$

Die Messergebnisse:

I_{eff} in mA	Schaltelement	$2\hat{U}$ in V	Δt in ms	φ
300	Widerstand	9,10	2,54	0,798
	Spule	13,43		
30	Widerstand	0,798	2,55	0,801
	Spule	1,274		

Tabelle 1: Messwerte der Luftspule mit 1000 Windungen

Die Impedanz $|Z|$ lässt sich, wie aus der Vorbereitung bekannt, aus dem Quotient der Spitzenwerte für Spannung und Strom berechnen:

$$|Z| = \frac{\hat{U}_{\text{Spule}}}{\hat{I}} = \hat{U}_{\text{Spule}} \cdot \frac{R}{\hat{U}_R} \; ; \quad \text{mit } \hat{I} = \frac{\hat{U}_R}{R} \tag{2}$$

Mit den folgenden Gleichungen, die alle in der Vorbereitung gezeigt wurden, lassen sich nun der Verlustwiderstand r und die Induktivität L der Spule berechnen:

$$r = |Z| \cdot \cos\varphi = \frac{\hat{U}_{\text{Spule}}}{\hat{I}} \cdot \cos\varphi = \frac{\hat{U}_{\text{Spule}} \cdot R}{\hat{U}_R} \cdot \cos\varphi \tag{3}$$

$$L = |Z| \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\varphi = \frac{\hat{U}_{\text{Spule}}}{\hat{I} \cdot 2\pi f} \cdot \sin\varphi = \frac{\hat{U}_{\text{Spule}} \cdot R}{\hat{U}_R \cdot 2\pi f} \cdot \sin\varphi \tag{4}$$

Mit den Informationen aus Tabelle (1), den bekannten Größen des Vorwiderstands $R = 10\ \Omega$ und der Frequenz $f = 50$ Hz sowie den obigen Formeln folgt:

I_{eff} in mA	Impedanz $\lvert Z\rvert$ in Ω	Verlustwiderstand r in Ω	Induktivität L in mH
300	14,76	10,303	33,6
30	15,96	11,111	36,5

Tabelle 2: Impedanz, Verlustwiderstand und Induktivität der Luftspule

Wir sehen, dass sowohl der Verlustwiderstand als auch die Induktivität bei beiden sehr unterschiedlichen Stromstärken in etwa gleich sind. Dies entspricht der Erwartung aus dem Hinweis der Versuchsanweisung, beide Werte der Luftspule hingen nicht von der Stromstärke ab.

Mit der bekannten Beziehung $\hat{I} = \sqrt{2} I_{\text{eff}}$, welche man aus dem sinusförmigen Verlauf der Stromstärke gewinnen kann, hätte man ebenfalls den Spitzenwert der Stromstärke ausrechnen können. Wir haben aber mit dem Spitzenwert der Stromstärke gerechnet, welche sich aus der Messung der Spitzenspannung des Vorwiderstands ergab. Denn hier konnten wir mit dem Oszilloskop direkt Spitzenwerte ablesen, wohingegen das Amperemeter, durch welches zwar Wechselstrom floss, aber die Effektivstromstärke anzeigte, größere Fehler aufweist.

Für den ersten Versuch, bei dem das Amperemeter eine Effektivstromstärke von $I_{\text{eff}} = 300$ mA anzeigte, maßen wir über den Vorwiderstand $\hat{I} = 455$ mA. Rechnerisch entspräche dieser Wert $I_{\text{eff}} = 322$ mA. Für den zweiten Versuch maßen wir mit dem Vorwiderstand $\hat{I} = 39{,}9$ mA, was rechnerisch $I_{\text{eff}} = 28{,}2$ mA entsprach. Die Werte passen also zueinander. Die Diskrepanz kann an Verlusten beim Messvorgang des Amperemeters liegen.

1.2 Theoretische Werte und Vergleich

In der Vorbereitung wurden die theoretischen Werte für die Induktivität L_{theo} und den Verlustwiderstand r_{theo} mit den gegebenen Spulendaten berechnet. Diese betrugen:

$$L_{\text{theo}} = 36{,}9 \text{ mH}$$

$$r_{\text{theo}} = 9{,}88\ \Omega$$

Diese Werte passen wunderbar zu unseren Messwerten. Allerdings floss in die Berechnung des theoretischen Wertes der Induktivität ein konstanter Vorfaktor k mit ein, der sich mit der Geometrie der Spule rechtfertigten ließ. Es ist aber anzunehmen, dass dieser Vorfaktor experimentell bestimmt wurde. Insofern sind unsere Ergebnisse für die Induktivität nur bedingt Indizien für die Gültigkeit der Theorie.

Bemerkenswert ist aber, dass wir durch die Messung des Verlustwiderstands festgestellt haben, dass dieser dem Widerstand des Drahtes entsprach (mit kleinen Abweichungen).

2 Induktivität und Verlustleistung einer Spule mit geschlossenem Eisenkern

2.1 Messung

Nun steckten wir dieselbe Luftspule aus Versuch 1 in einen Eisenring, sodass der Innenraum der Spule komplett mit Eisen gefüllt war. Anschließend führten wir dieselben Messungen wie bei Versuch 1 durch, diesmal jedoch mit den Effektivstromstärken 30 mA und 10 mA.

Bei der Messung der Spitzenspannung der Spule bei $I_{\text{eff}} = 30$ mA war die Amplitude der Spannung so groß, dass die Spitzenwerte auf dem Bildschirm nicht mehr zu erkennen waren. Um die Spitzenspannung aber trotzdem messen zu können, behalfen wir uns mit einem Vorwiderstand mit 9,6 MΩ, den wir in Reihe schalteten. Der Innenwiderstand des Oszilloskops betrug 1 MΩ. Wir mussten in diesem Fall also den angezeigten Wert der Spannung mit $\frac{9{,}6+1}{1} = 10{,}6$ multiplizieren.

Die Messergebnisse:

I_{eff} in mA	Schaltelement	$2\hat{U}$ in V	Δt in ms	φ
30	Widerstand	0,796	2,71	0,851
	Spule	101,0		
10	Widerstand	0,2845	4,16	1,307
	Spule	24,07		

Tabelle 3: Messwerte der Spule im geschlossen Eisenkern mit 1000 Windungen

Mit den Gleichungen (2), (3), (4) sowie den bekannten festen Daten $R = 10\ \Omega$ und $f = 50$ Hz lässt sich berechnen:

I_{eff} in mA	Impedanz $\|Z\|$ in Ω	Verlustwiderstand r in Ω	Induktivität L in H
30	1269,07	836,61	3,04
10	846,05	220,60	2,60

Tabelle 4: Impedanz, Verlustwiderstand und Induktivität der Spule mit geschlossenem Eisenkern

Man sieht an diesen Werten deutlich, dass bei einer Spule mit Eisenkern Impedanz, Verlustwiderstand und Induktivität stark von der Stromstärke abhängen.

2.2 Berechnung der Permeabilität und der Gesamtverlustleistung

Für große Permeabilitäten $\mu \gg 1$ kann man für die Induktivität der Spule annehmen, dass sie um den μ größer ist also im Vakuum bzw. in der Luft. Daraus folgt:

$$L = \mu \cdot n^2 \mu_0 \frac{A}{l} \Leftrightarrow \mu = \frac{L \cdot l}{n^2 \mu_0 A} \tag{5}$$

Im Gegensatz zur Berechnung der Induktivität der Luftspule muss man hier für die Fläche A und die Länge l die Größen des Eisenkerns nehmen. Die quadratische Querschnittsfläche A beträgt $A = 3{,}9\ \text{cm} \cdot 3{,}9\ \text{cm} = 1{,}521 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$. Die durchschnittliche Feldlinienlänge l ist laut der Anweisung angegeben als $l = 48\ \text{cm} = 0{,}48$ m.

Für die Verlustleistung gilt (in der Vorbereitung hergeleitet):

$$P = I_{\text{eff}}^2 \cdot r \tag{6}$$

Mit den Ergebnissen aus Tabelle (4) folgt:

I_{eff} in mA	Permeabilität μ	Verlustleistung P in W
30	763	0,75
10	653	0,022

Tabelle 5: Impedanz, Verlustwiderstand und Induktivität der Spule mit geschlossenem Eisenkern

Für die Effektivstromstärken wurden hier wiederum die Werte 30 mA bzw. 10 mA genommen, da diese direkt mit dem Amperemeter gemessen wurden.

3 Ferromagnetische Hysteresis und Ummagnetisierungsverluste

3.1 Oszilloskopische Darstellung

Die Hysteresekurve wurde wie in der Aufgabenstellung vorgegeben auf dem Oszilloskop dargestellt. Dabei haben wir für das RC-Glied den Widerstand $R_1 = 100\ \mathrm{k\Omega}$ und den Kondensator $C_1 = 10\ \mathrm{\mu F}$ verwendet. Allerdings haben wir die Anschlüsse für X- und Y-Ablenkung vertauscht, was aber an der Art der Kurve nichts ändert.

Die ausgedruckten Hysteresekurven finden sich beim Messprotokoll, Kurve 1 zeigt die Hystereseschleife bei einem Spulenstrom von 30 mA, Kurve 2 bei 10 mA.

3.2 Eichung der Achsen

Für die H-Achse gilt:

$$H = \frac{n_1}{Rl} U_R = \frac{1000}{10\ \Omega \cdot 48\ \mathrm{cm}} = 208{,}3\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} \cdot U_R$$

Für die B-Achse gilt:

$$B = \frac{R_1 C_1}{n_2 A} \cdot U_C = \frac{100\ \mathrm{k\Omega} \cdot 10\ \mathrm{\mu F}}{50 \cdot (3{,}9\ \mathrm{cm})^2} \cdot U_C = 13{,}15\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} \cdot U_C$$

3.3 Bestimmung des Flächenintegrals

Das Integral $\oint B\,\mathrm{d}H$ haben wir durch Ausschneiden und Wiegen der ausgedruckten Kurve bestimmt.

Um die Messmethode für das Papier zu eichen, haben wir ein $100\ \mathrm{cm}^2$ großes Stück des Papiers gewogen und dadurch dessen Flächendichte σ bestimmt.

$$\sigma = \frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} = \frac{m_{\text{Papier}}}{A_{\text{Papier}}} = \frac{0{,}7708\ \mathrm{g}}{100\ \mathrm{cm}^2} = 7{,}708\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^2} = 77{,}08\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$$

Damit lässt sich die Fläche $A = \frac{m}{\sigma}$ der ausgeschnitten Kurve mit der Masse m berechnen.

Anhand der Skalen auf den Ausdrucken lässt sich mittels Eichung aus Aufgabe 3.2 berechnen, welche Strecke s welcher Flussdichte B bzw. Feldstärke H entspricht. Dazu benötigt man das Verhältnis einer Spannungsdifferenz ΔU zur dazugehörigen Strecke Δs auf der Skala:

$$\frac{H}{s_H} = \frac{\Delta H}{\Delta s_H} = 208{,}3\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} \cdot \frac{\Delta U_R}{\Delta s_H} \tag{7}$$

$$\frac{B}{s_B} = \frac{\Delta B}{\Delta s_B} = 13{,}15\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{\Delta U_C}{\Delta s_B} \tag{8}$$

Somit lässt sich die Ummagnetisierungsarbeit pro Volumen pro Papierfläche mittels Gleichungen 7 und 8 bestimmen:

$$\frac{\frac{W_{\mathrm{mag}}}{V}}{A} = \frac{H}{s_H} \cdot \frac{B}{s_B} = 2739\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{V}^2\mathrm{m}^3} \cdot \frac{\Delta U_R}{\Delta s_H} \cdot \frac{\Delta U_C}{\Delta s_B}$$

Daraus folgt also für die Ummagnetisierungsarbeit pro Volumen und Zyklus:

$$\frac{W_{\mathrm{mag}}}{V} = \frac{\frac{W_{\mathrm{mag}}}{V}}{A} \cdot \frac{m}{\sigma} = 35{,}54\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{gV}^2\mathrm{m}} \cdot \frac{\Delta U_R}{\Delta s_H} \cdot \frac{\Delta U_C}{\Delta s_B} \cdot m \tag{9}$$

Mit dem Volumen $V \approx A \cdot l = (3{,}9\ \mathrm{cm})^2 \cdot 48\ \mathrm{cm} = 7{,}3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$ des Eisenkerns und der Netzfrequenz $f = 50$ Hz ergibt sich eine Ummagnetisierungs-Verlustleistung von

$$P_{\mathrm{mag}} = \frac{W_{\mathrm{mag}}}{V} \cdot V \cdot f = 1{,}29735\ \frac{\mathrm{Jm}^2}{\mathrm{sgV}^2} \cdot \frac{\Delta U_R}{\Delta s_H} \cdot \frac{\Delta U_C}{\Delta s_B} \cdot m \tag{10}$$

Für den Verlustwiderstand gilt dann:

$$R_S = \frac{P_{\mathrm{mag}}}{I_{\mathrm{eff}}^2} \tag{11}$$

Somit folgt für die beiden eingestellten Spulenströme nach Gleichung 9 und 10:

i) Kurve 1: $I = 30$ mA
Gewicht der Kurve: $m = 0{,}3153$ g
Abgelesene Skalierungen: $\Delta U_C = 0{,}1$ V, $\Delta s_B = 0{,}269$ m; $\Delta U_R = 1$ V, $\Delta s_H = 0{,}163$ m

$$\Rightarrow \frac{W_{\mathrm{mag}}}{V} = 25{,}557\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\Rightarrow P_{\mathrm{mag}} = 933\ \mathrm{mW}$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung 11 ein Verlustwiderstand von

$$R_S = 1037\ \Omega$$

ii) Kurve 2: $I = 10$ mA
Gewicht der Kurve: $m = 0{,}0191$ g
Abgelesene Skalierungen: $\Delta U_C = 0{,}1$ V, $\Delta s_B = 0{,}269$ m; $\Delta U_R = 0{,}4$ V, $\Delta s_H = 0{,}173$ m

$$\Rightarrow \frac{W_{\mathrm{mag}}}{V} = 583{,}46\ \frac{\mathrm{mJ}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\Rightarrow P_{\mathrm{mag}} = 21{,}3\ \mathrm{mW}$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung 11 ein Verlustwiderstand von

$$R_S = 213\ \Omega$$

Zusammenfassung:

	Kurve 1	Kurve 2
Spulenstrom:	30 mA	10 mA
Masse der Fläche:	0,3153 g	0,0191 g
Ummagnetisierungsarbeit pro Volumen und Zyklus:	25557 $\frac{\text{mJ}}{\text{m}^3}$	583,46 $\frac{\text{mJ}}{\text{m}^3}$
Ummagnetisierungs-Verlustleistung:	933 mW	21,3 mW
Verlustwiderstand:	1037 Ω	213 Ω

Somit ist, wie man sieht, bei größerer Stromstärke auch die Verlustleistung größer.

3.4 Permeabilität

Wir haben am Computer die maximalen Werte für U_R und U_C abgelesen und daraus B_1 und H_1 eines Zyklus bestimmt (Umgerechnet nach Aufgabe 3.2). Für die Wechselfeld-Permeabilität gilt dann:

$$\mu_r = \frac{B_1}{\mu_0 H_1}$$

Messwerte:

	Kurve 1	Kurve 2
Spulenstrom:	30 mA	10 mA
U_R:	411,0 mV	139,8 mV
U_C:	12,37 mV	1,64 mV
H_1:	85,6 $\frac{\text{A}}{\text{m}}$	29,1 $\frac{\text{A}}{\text{m}}$
B_1:	167,4 mT	21,6 mT
μ_r:	1556	590

3.5 Vergleich

Für $I_{\text{eff}} = 10$ mA stimmen Permeabilitätszahl und Verlustwiderstand gut mit Aufgabe 2 überein. Dabei ist zu beobachten, dass die Ummagnetisierungs-Verlustleistung zusammen mit der Verlustleistung am Draht $R_L I_{\text{eff}}^2$ nicht ganz der Gesamtverlustleistung entspricht:

$$0{,}021 \text{ W} + 0{,}001 \text{ W} \lessapprox 0{,}022 \text{ W}$$

Für $I_{\text{eff}} = 30$ mA zeigt sich dies aufgrund unterschiedlicher Messwerte leider nicht.

4 Vergleich Eisen–Ferrit

Wir haben einen Eisenkern (250 Windungen, $I_{\text{eff}} = 200\,\text{mA}$) und einen Ferrit-Schalenkern (250 Windungen, $I_{\text{eff}} = 15$ mA) untersucht, für beide die Hysteresekurven wie in Aufgabe 3.1 dargestellt und folgende Werte bestimmt und verglichen:

Da wir nun andere Spulendaten haben, muss die Eichung neu durchgeführt werden.

- Für die H-Achse gilt für den Eisenkern:

$$H = \frac{n_1}{Rl} U_R = \frac{250}{10\ \Omega \cdot 48\ \text{cm}} = 52{,}08\ \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot U_R$$

- Die B-Achse für den Eisenkern ändert sich nicht, es gilt weiterhin:

$$B = 13{,}15\ \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \cdot U_C$$

- Für die H-Achse gilt für den Ferritkern:

$$H = \frac{n_1}{Rl} U_R = \frac{250}{10\ \Omega \cdot 10{,}5\ \text{cm}} = 238{,}1\ \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot U_R$$

- Für die B-Achse gilt für den Ferritkern:

$$B = \frac{R_1 C_1}{n_2 A} \cdot U_C = \frac{100\ \text{k}\Omega \cdot 10\ \mu\text{F}}{50 \cdot 6{,}25\ \text{cm}^2} \cdot U_C = 32\ \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \cdot U_C$$

Somit bekommen wir folgende Werte für Eisen- und Ferritkern:

- Die Remanenz, also B an der Stelle $H = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{Eisenkern: } U_C = 30{,}8\ \text{mV} &&\Rightarrow B_R = 405\ \text{mT} \\ &\text{Ferritkern: } U_C = 1{,}28\ \text{mV} &&\Rightarrow B_R = 40{,}96\ \text{mT} \end{aligned}$$

- Die Koerzitivkraft, also H an der Stelle $B = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{Eisenkern: } U_R = 1{,}82\ \text{V} &&\Rightarrow H_C = 94{,}79\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ &\text{Ferritkern: } U_R = 37{,}0\ \text{mV} &&\Rightarrow H_C = 8{,}81\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \end{aligned}$$

- Die Sättigungsinduktion B_S, durch ablesen des Maximalwertes von B:

$$\begin{aligned} &\text{Eisenkern: } U_C = 40{,}16\ \text{mV} &&\Rightarrow B_S = 528{,}1\ \text{mT} \\ &\text{Ferritkern: } U_C = 6{,}05\ \text{mV} &&\Rightarrow B_S = 193{,}6\ \text{mT} \end{aligned}$$

- Die Ummagnetisierungs-Verlustleistung (wie in Aufgabe 3.3):
  i) Eisenkern (Kurve 3): Gewicht der Kurve: $m = 0{,}8855$ g
  Abgelesene Skalierungen: $\Delta U_C = 0{,}1$ V, $\Delta s_B = 0{,}269$ m; $\Delta U_R = 10$ V, $\Delta s_H = 0{,}163$ m;
  $l = 48$ cm, $f = 50$ Hz, $A = (3{,}9 \text{ cm})^2$

$$\begin{aligned} P_{\text{mag}} &= \frac{m}{\sigma}\frac{H}{s_H} \cdot \frac{B}{s_B} \cdot lAf \\ &= 6550 \text{ mW} \end{aligned}$$

  ii) Ferrit-Kern (Kurve 4): Gewicht der Kurve: $m = 0{,}0202$ g
  Abgelesene Skalierungen: $\Delta U_C = 0{,}1$ V, $\Delta s_B = 0{,}269$ m; $\Delta U_R = 1$ V, $\Delta s_H = 0{,}163$ m;
  $l = 10{,}5$ cm, $f = 50$ Hz, $A = 6{,}25 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned} P_{\text{mag}} &= \frac{m}{\sigma}\frac{H}{s_H} \cdot \frac{B}{s_B} \cdot lAf \\ &= 14{,}94 \text{ mW} \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Messwerte:

	Eisenkern	Ferritkern
Spulenstrom:	200 mA	15 mA
Masse der Fläche:	0,8855 g	0,0202 g
Ummagnetisierungs-Verlustleistung:	6550 mW	14,94 mW
Sättigungsinduktion:	528,1 mT	193,6 mT
Remanenz:	405 mT	40,96 mT
Koerzitivkraft:	94,79 $\frac{\text{A}}{\text{m}}$	8,81 $\frac{\text{A}}{\text{m}}$

Der Ferrit-Kern hat somit eine extrem geringere Verlustleistung als der Eisenkern. Daher werden Ferrite oft für Spulen hoher Güte verwendet. Der Eisenkern dagegen hat eine wesentlich höhere Sättigungsinduktion, weshalb sich dieser besonders gut für Transformatoren oder Elektromagneten eignet.